

تعريف:

المتماثل العكسي

نضلع f التطبيق $(x, y) \rightarrow (y, x)$ f $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تقابل طوبولوجي
متماثل \mathbb{R} مع \mathbb{R} تقابل متماثل عكسي

 f تقابل (عكسي ومتماثل) f متماثل

نعم: متماثل

* نقول عن فضاءين طوبولوجيين X و Y متماثلين إذا وجد بينهما تطابق فضاء
واحد إلى الآخر

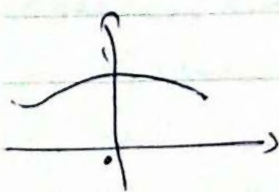
٨٣

* التطبيقات المفتوحة والمغلقة:

لاحظنا خلال دراستنا للاستمرار أن الحديث يجري دوماً عن الصورة المباشرة
بالنسبة لهذه الصورة المباشرة نعرف الآن:

- نقول عن التطبيق $f: X \rightarrow Y$ من فضاء طوبولوجي X إلى فضاء طوبولوجي Y أنه مفتوح
إذا كانت الصورة المباشرة وفئة لأي مجموعة مفتوحة U في X هي مجموعة مفتوحة
ونقول عن التطبيق f أنه مغلق إذا كانت الصورة المباشرة وفئة لأي مجموعة
مغلقة F في X هي مجموعة مغلقة.

* مثال ١:



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

لأخذ التطبيق نأخذ الدالة

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

المعرفة بالشكل الآتي

هذا التطبيق مستمر ولكنه ليس مفتوحاً وليس مغلقاً

الحل:

نبر الدالة $f(x)$

$$f(\mathbb{R}) =]0, 1]$$

\mathbb{R} مفتوح بينما $f(\mathbb{R})$ صورته المباشرة غير مفتوحة f مغلقة وصورتها المباشرة
مغلقة

* مثال ٢:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

لأخذ التطبيق

Date : / /



Subject:



و نأخذ الدالة المعرفة بالشكل الآتي:

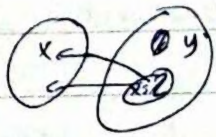
$$y = f(x) = 2$$

الكل:

نشر من أن u مجموعة مفتوحة لا المستقر هناك احصا لان

$$R = f^{-1}(u) \quad \text{الأول} \quad x = 2 \in u \quad \text{عندها الصورة العكسية لـ } u \text{ نقول:}$$

$$\emptyset = f^{-1}(u) \quad \text{الثاني} \quad x = 2 \notin u \quad \text{عندها الصورة العكسية لـ } u \text{ نقول:}$$

وبالتالي هذا التطبيق مستمر وهو مغلقة لأن A مجموعةمغلقة لأن المطابقة R فإن: $f(A) = \{2\}$ وهي مجموعة وحيدةالنظر ومجموعة وحيدة النظر مغلقة في R ولواخذنا أي مجموعة مفتوحة في R ولتكن G , $f(G) = \{2\}$ والمجموعة وحيدة

النظر هي مجموعة غير مفتوحة

مبرهنة:

ليكن $f: X \rightarrow Y$ نقابلا بين الفضاء X والفضاء Y ان العقابيا

التالي متكافئة:

1. f هو مستمر2. f مستمر ومفتوح3. f مستمر ومغلقةالشرط الأول يعني أن: f مستمر و f مستمرالشرط الثاني يعني أن: f مستمر و f مفتوحالشرط الثالث يعني أن: f مستمر و f مغلقة

البرهان

حيث f^{-1} مستمر $\Leftrightarrow f$ مفتوح $\Leftrightarrow f$ مغلقةوإن $X \rightarrow Y$: f^{-1} مستمرلتكن u مجموعة مفتوحة في X وبما أن f^{-1} مستمر فالصورة العكسية وفقة هي

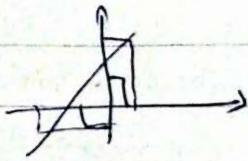
$$f^{-1}(f^{-1}(u)) = u$$

$$f^{-1}(f(u)) = u \quad \text{ولتكن}$$

و يبرر بقى الشر بالأسية للمجموعة مغلقة

مبرهنة

مثال :



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

لنأخذ التطبيق

ولنأخذ الدالة المعرّفة بالنكلا : $y = 2x + 3$ - f هو مورفزم لأن f تقابل وهو مستمر (لأن الدالة خطية)و f مستمر لأن الدالة العكسية للدالة المعطاة مستمر $x = \frac{y-3}{2} = \frac{y}{2} - \frac{3}{2}$ وإن f متصلة ومفتوح تكونه هو مورفزم

$$f^{-1}([a, b]) = [a-3, b-3] \\ = [\frac{a-3}{2}, \frac{b-3}{2}]$$

الدالة العكسية لمجال مفتوح هي مجال مفتوح وبالتالي التطبيق ~~مفتوح~~ مستمر

* تعريف :

لنقرن $f: X \rightarrow Y$ هو مورفزم أثبت أن الصورة المباشرةأي جوار للنقطة x (نقطة سميّة من x) هو جوار للنقطة $f(x)$.حيث U جوار سمي x فإن $f(U)$ جوار $f(x)$

البرهان :

بما أن U جوار فسمي لقرن الجوار يوجد مجموعة مفتوحة V بحيث $x \in V \subseteq U$

$$f(x) \in f(V) \subseteq f(U)$$

سواء f مفتوح فالمجموعة $f(V)$ مجموعة مفتوحة في Y وهذا يعني أن $f(U)$ جوار

* ملاحظة :

يكون التطبيق $f: X \rightarrow Y$ مغلقاً إذا وفقط إذا تحققت العلامة الأتية

$$f(\bar{A}) \supseteq \overline{f(A)}$$

من أجل أي مجموعة جزئية $A \subseteq X$

البرهان :

نقرن أن f مغلق ولنأخذ مجموعة سميّة A من X لدينا دوماً :

$$f(A) \supseteq \overline{f(A)} \iff A \supseteq \bar{A}$$

$$f(\bar{A}) \supseteq \overline{f(A)}$$

بما أن العلامة \bar{A} مجموعة مغلقة و f تطبيق مغلق فالمجموعة $f(\bar{A})$

$$f(\bar{A}) \supseteq \overline{f(A)}$$

 \Rightarrow نقرن أن العلاقة وسفقت أن التطبيق مغلق

Date : / /



Subject:

وهي تتركز على مغلقة يجب أخذ مجموعة مغلقة ومنه ان صورتها المباشرة مغلقة
لأخذ مجموعة A مغلقة وسكونها مغلقة فإن $A = \bar{A}$
وهي $f(A) = f(\bar{A}) \supseteq \overline{f(A)}$ ومنه العكس
 $f(A)$ مغلقة وبالتالي فهي لصاقتها وبالتالي التطبيق مغلقة
برهان:

يكون التطبيق $f: X \rightarrow Y$ مفتوحاً إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:
 $f(A^\circ) \subseteq f(A)^\circ$ من أجل أي A من X

البرهان:

\Leftarrow f مفتوح ولتكن A ولدينا دوماً $A \supseteq A^\circ$
وهي $(f(A))^\circ \supseteq (f(A^\circ))^\circ \Leftarrow f(A) \supseteq f(A^\circ)$
 $= f(A^\circ)$

\Rightarrow نأخذ مجموعة مفتوحة فيكون $f(A) = f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$
وبالتالي التطبيق مفتوح